УДК 514.7

О СЕРДЦЕВИНЕ ТРИ-ТКАНИ МУФАНГ

Гегамян Г.Д.
Кафедра функционального анализа и геометрии

Поступила в редакцию 05.02.2013, после переработки 15.02.2013.

Три-ткань Муфанг M индуцирует на базе каждого из трех ее слоений одну и ту же сердцевину.

Moufang three-web M induces the same core on the base of each of its three foliations.

Ключевые слова: три-ткань Бола, сердцевина ткани Бола, локально симметрическое пространство, три-ткань Муфанг, сердцевина ткани Муфанг.
Keywords: Bol three-web, core of Bol three-web, locally symmetric space, Moufang three-web, core of Moufang web.

Введение

Известно [1], что любая левая три-ткань Бола (ткань $B_l \equiv B_l(r,r,r)$) индуцирует на базе первого слоения локально симметрическую структуру, которая порождается локальной гладкой квазигруппой, называемой сердцевиной ткани Бола. В настоящей работе рассматривается три-ткань Муфанг $M \equiv M(r,r,r)$, которая, как известно, является левой тканью Бола. Поэтому она порождает на базе первого слоения сердцевину. Поскольку ткань Муфанг является также правой и средней тканью Бола (тканью $B_r \equiv B_r(r,r,r)$ и $B_m \equiv B_m(r,r,r)$ одновременно), то она индуцирует сердцевину на базах ее второго и третьего слоений, причем ту же, что и на базе первого слоения, так как все указанные сердцевины задаются в некоторых локальных координатах одними и теми же уравнениями (теорема 1). Полученный результат проиллюстрирован на примере сердцевины восьмимерной ткани Муфанг, определяемой лупой Муфанг минимальной размерности $r = 4$ [1]. Указаны некоторые свойства три-ткани, порождаемой этой сердцевиной (предложения 1 и 2).

1. Сердцевины, порождаемые три-тканью Муфанг

Определение 1. *Три-тканью $W(r,r,r)$ на $2r$-мерном дифференцируемом многообразии $\mathcal{M}$ называется совокупность трех гладких слоений λ_1, λ_2 и λ_3, слои которых имеют размерность r, причем любые два из этих слоений находятся в общем положении.*

Следуя [1], зададим слоения ткани $W(r,r,r)$ в некоторых локальных координатах на многообразии $\mathcal{M}$ уравнениями

$$\lambda_1: \; x = const, \quad \lambda_2: \; y = const, \quad \lambda_3: \; z = f(x,y) = const,$$

где $x = (x^1, ..., x^r)$, $x \in X$, $y = (y^1, ..., y^r)$, $y \in Y$, $z = (z^1, ..., z^r)$, $z \in Z$, а функция $f = (f^1, ..., f^r)$ является гладкой и в каждой точке многообразия $\mathcal{M}$ удовлетворяет условиям $|\dfrac{\partial f}{\partial x}| \neq 0$, $|\dfrac{\partial f}{\partial y}| \neq 0$.

Уравнение $z = f(x,y)$, с одной стороны, связывает параметры x, y и z слоев первого, второго и третьего слоений три-ткани $W(r,r,r)$, проходящих через одну точку многообразия $\mathcal{M}$, и называется уравнением три-ткани $W(r,r,r)$. С другой стороны, это уравнение определяет квазигруппу

$$(\cdot): \; X \times Y \to Z, \quad z = f(x,y) \equiv x \cdot y, \tag{1}$$

которая называется локальной координатной квазигруппой ткани $W(r,r,r)$. В соответствии с [1] обозначим ${}^{-1}f$ левую обратную операцию, а f^{-1} – правую обратную операцию квазигруппы (1), так что

$$x = {}^{-1}f(z,y), \quad y = f^{-1}(x,z).$$

Переменные x, y и z допускают преобразования вида

$$\tilde{x} = \alpha(x), \quad \tilde{y} = \beta(y), \quad \tilde{z} = \gamma(z), \tag{2}$$

где α, β, γ – локальные диффеоморфизмы. Тройка (α, β, γ) называется изотопическим преобразованием или изотопией [1]. Если $\gamma = id$, то изотопия называется главной.

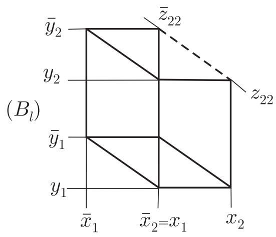

Рис. 1

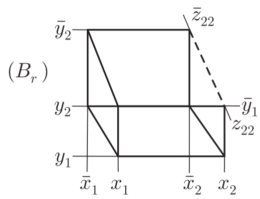

Рис. 2

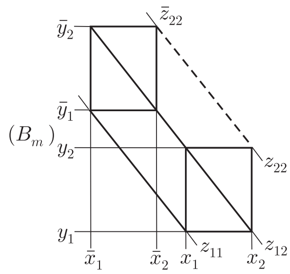

Рис. 3

В [1] описаны основные классы три-тканей $W(r,r,r)$, в том числе три-ткани Бола – левая $B_l \equiv B_l(r,r,r)$, правая $B_r \equiv B_r(r,r,r)$ и средняя $B_m \equiv B_m(r,r,r)$. Эти ткани характеризуются замыканием соответствующих достаточно малых конфигураций Бола – левых (B_l), правых (B_r) и средних (B_m), см. рис. 1 – 3. Слои первого, второго и третьего слоений ткани изображаются на этих рисунках вертикальными, горизонтальными и наклонными линиями соответственно.

Определение 2. *Три-ткань, на которой замыкаются конфигурации Бола всех трех типов, называется тканью Муфанг и обозначается M.*

Таким образом, три-ткань Муфанг $M \equiv M(r,r,r)$ является одновременно левой, правой и средней тканью Бола.

Отметим [1], что условие замыкания на ткани конфигураций Бола каких-либо двух типов влечет замыкание на ней и конфигураций Бола третьего типа, а именно:

$$(B_l) \wedge (B_r) \Rightarrow (B_m), \quad (B_l) \wedge (B_m) \Rightarrow (B_r), \quad (B_r) \wedge (B_m) \Rightarrow (B_l).$$

Поэтому в определении ткани Муфанг достаточно ограничиться требованием замыкания на ткани конфигураций Бола каких-либо двух типов.

С другой стороны, три-ткань Муфанг характеризуется тем, что любая ее локальная координатная квазигруппа изотопна лупе Муфанг. Напомним [1], что лупа (квазигруппа с единицей) является лупой Муфанг, если в ней выполняется тождество Муфанг:

$$(u \circ v) \circ (w \circ u) = u \circ ((v \circ w) \circ u)$$

или какое-либо из эквивалентных ему тождеств:

$$u \circ (v \circ (u \circ w)) = ((u \circ v) \circ u) \circ w, \quad ((w \circ u) \circ v) \circ u = w \circ (u \circ (v \circ u)),$$

где $(\circ)$ – операция в лупе.

Поскольку три-ткань Муфанг является левой тканью Бола, то она обладает сердцевиной. Так называется локальная квазигруппа, определяемая на базе первого слоения ткани B_l по следующему правилу (см. [5] или приложение 1 к монографии [1]). Условию замыкания на ткани B_l конфигураций (B_l) соответствуют равенства

$$f(x_1, y_1) = f(\bar{x}_1, \bar{y}_1), \quad f(x_2, y_1) = f(x_1, \bar{y}_1),$$

где $x_1, \bar{x}_1, x_2 \in X$, $y_1, \bar{y}_1 \in Y$, см. рис. 1. Исключая из них $\bar{y}_1$ и обозначая

$$x_1 = a, \quad \bar{x}_1 = b, \quad x_2 = c, \tag{3}$$

получим уравнение $f(c, y_1) = f(a, f^{-1}(b, f(a, y_1)))$, которое запишем в явном виде

$$c =^{-1} f(f(a, f^{-1}(b, f(a, y_1))), y_1). \tag{4}$$

Оно выполняется для любого $y_1 \in Y$ и задает операцию $(*): X \times X \to X$, $c = a * b$, называемую сердцевиной три-ткани B_l. Известно [1], что сердцевина три-ткани B_l является идемпотентой ($a * a = a$), левообратимой ($a * (a * b) = b$) и леводистрибутивной ($a * (b * c) = (a * b) * (a * c)$). Поэтому она изотопна левой лупе Бола. Известно также [5], [6], что сердцевина ткани не изотопна, вообще говоря, координатной квазигруппе этой ткани.

Укажем некоторые свойства три-ткани Муфанг, связанные с понятием сердцевины.

Сначала заметим, что в силу замыкания на три-ткани Муфанг конфигураций (B_r) и (B_m) аналогичным образом могут быть определены локальные квазигруппы (сердцевины) на базах второго и третьего слоений ткани M. Так, условию замыкания на три-ткани M конфигураций (B_r) соответствуют равенства

$$f(x_1, y_1) = f(\bar{x}_1, y_2), \quad f(x_1, y_2) = f(\bar{x}_1, \bar{y}_2),$$

где $x_1, \bar{x}_1 \in X$, $y_1, y_2, \bar{y}_2 \in Y$, см. рис. 2. Исключим из этих равенств $\bar{x}_1$ и обозначим

$$y_2 = \bar{a}, \quad y_1 = \bar{b}, \quad \bar{y}_2 = \bar{c}, \tag{5}$$

в результате получим уравнение $f(x_1,\bar a) = f({}^{-1}f(f(x_1,\bar b),\bar a),\bar c)$, которое также запишем в явном виде

$$\bar c = f^{-1}({}^{-1}f(f(x_1,\bar b),\bar a), f(x_1,\bar a)). \tag{6}$$

Оно выполняется для любого $x_1 \in X$ и определяет на базе второго слоения ткани локальную квазигруппу $(\bar *) : Y \times Y \to Y$, $\bar c = \bar a \bar * \bar b$.

Теперь рассмотрим на ткани M условие замыкания конфигураций (B_m):

$$z_{11} = f(x_1,y_1), \quad z_{12} = f(x_1,y_2) = f(x_2,y_1), \quad z_{22} = f(x_2,y_2), \tag{7}$$

см. рис. 3. Исключая из уравнений (7) переменные x_1, x_2, y_2, получим равенство

$$z_{22} = f({}^{-1}f(z_{12},y_1), f^{-1}({}^{-1}f(z_{11},y_1), z_{12})), \tag{8}$$

которое должно выполняться для любого $y_1 \in Y$, а потому задает на базе Z третьего слоения ткани M локальную квазигруппу $(\tilde *) : Z \times Z \to Z$, $z_{22} = z_{12} \tilde * z_{11}$. Уравнение (8) может быть записано также в виде

$$z_{22} = f({}^{-1}f(z_{12}, f^{-1}(x_1,z_{11})), f^{-1}(x_1,z_{12})), \tag{9}$$

которое получается из равенств (7) исключением переменных y_1, y_2, x_2 и должно выполняться для любого $x_1 \in X$.

Таким образом, для ткани Муфанг определены операции $(*)$, $(\bar *)$ и $(\tilde *)$ соответственно на базе первого, второго и третьего ее слоений. Покажем, что эти операции задают одну и ту же сердцевину, то есть верна

Теорема 1. *Три-ткань Муфанг индуцирует на базе каждого из трех ее слоений одну и ту же сердцевину.*

Доказательство. Как сказано выше, локальная координатная квазигруппа (1) три-ткани $W(r,r,r)$ допускает изотопические преобразования вида (2). При этом в семейство изотопных квазигрупп входят координатные лупы ткани (квазигруппы с единицей). Пусть в окрестности произвольной точки P многообразия $\mathcal{M}$, несущего рассматриваемую три-ткань, локальные координаты выбраны так, что функция f определяет локальную координатную лупу ткани с единицей e, то есть $f(x,e) = x$, $f(e,y) = y$. С учетом этого условия найдем уравнения квазигрупп $(*)$, $(\bar *)$ и $(\tilde *)$.

Уравнение (4) определяет квазигруппу (сердцевину) $c = a * b$ на базе X первого слоения ткани и выполняется для любого $y_1 \in Y$. В частности, при $y_1 = e$ получим уравнение этой квазигруппы в виде

$$c = f(a, f^{-1}(b,a)), \quad a,b,c \in X. \tag{10}$$

Аналогично, уравнение (6), определяющее квазигруппу $\bar c = \bar a \bar * \bar b$ на базе Y второго слоения ткани, выполняется для любого $x_1 \in X$, в том числе для $x_1 = e$. При этом уравнение (6) приводится к виду

$$\bar c = f^{-1}({}^{-1}f(\bar b,\bar a),\bar a), \quad \bar a,\bar b,\bar c \in Y. \tag{11}$$

Уравнения (8) и (9), определяющие квазигруппу $z_{22} = z_{12}\tilde{*}z_{11}$ на базе Z третьего слоения ткани, выполняются соответственно для любых $y_1 \in Y$ и $x_1 \in X$, в том числе для $y_1 = e$ и $x_1 = e$. При этом они приводятся соответственно к виду:

$$z_{22} = f(z_{12}, f^{-1}(z_{11}, z_{12})), \tag{12}$$

$$z_{22} = f(^{-1}f(z_{12}, z_{11}), z_{12}), \tag{13}$$

где $z_{11}, z_{12}, z_{22} \in Z$.

Сравнивая полученные уравнения (10) – (13), видим, что уравнения (10) и (12) имеют один и тот же вид. Эти уравнения связывает тождественное преобразование $a \to z_{12}$, $b \to z_{11}$, $c \to z_{22}$, которое следует из равенств

$$z_{11} = f(\bar{x}_1, y_1) = b, \quad z_{12} = f(x_1, y_1) = a, \quad z_{22} = f(x_2, y_1) = c,$$

(см. рис. 1), при $y_1 = e$ с учетом обозначений (3).

Теперь сравним уравнения (11) и (13). Приведем уравнение (11) к виду (13). В силу свойства левой обратимости $\bar{a}\bar{*}(\bar{a}\bar{*}\bar{b}) = \bar{b}$ операции $(\bar{*})$, определяемой уравнением (11), имеем: $\bar{b} = \bar{a} * \bar{c} = f^{-1}(^{-1}f(\bar{c}, \bar{a}), \bar{a})$. Отсюда получаем уравнение $\bar{c} = f(^{-1}f(\bar{a}, \bar{b}), \bar{a})$, которое имеет тот же вид, что и уравнение (13). Тождественное преобразование $\bar{a} \to z_{12}$, $\bar{b} \to z_{11}$, $\bar{c} \to z_{22}$, связывающее полученное уравнение с уравнением (13), получается из равенств

$$z_{11} = f(\bar{x}_1, y_1) = \bar{b}, \quad z_{12} = f(\bar{x}_1, y_2) = \bar{a}, \quad z_{22} = f(\bar{x}_1, \bar{y}_2) = \bar{c},$$

(см. рис. 2) при $\bar{x}_1 = e$ с учетом обозначений (5).

Таким образом, операции $(*)$, $(\bar{*})$ и $(\tilde{*})$ задают одну и ту же квазигруппу – сердцевину ткани Муфанг. □

2. О сердцевине восьмимерной три-ткани Муфанг

Найдем уравнения сердцевины восьмимерной три-ткани Муфанг [1]:

$$\begin{cases} z^1 = x^1 e^{-y^4} + y^1 e^{x^4}, \\ z^2 = x^2 e^{-y^4} + y^2 e^{x^4}, \\ z^3 = x^3 e^{y^4} + y^3 e^{-x^4} - (x^1 y^2 - x^2 y^1), \\ z^4 = x^4 + y^4. \end{cases} \tag{14}$$

Согласно [1] эти уравнения определяют лупу Муфанг минимальной размерности $r = 4$ с единицей $e(0, 0, 0, 0)$ – локальную координатную лупу рассматриваемой ткани. По теореме 1 сердцевина ткани Муфанг может быть задана уравнением (10) или эквивалентным ему уравнением (11). Сначала найдем уравнение вида (10). Запишем его в неявном виде:

$$f^{-1}(a, c) = f^{-1}(b, a). \tag{15}$$

Далее найдем правую обратную операцию f^{-1} для лупы (14) и с учетом полученных равенств запишем неявные уравнения (15) сердцевины. Из них получим уравнения сердцевины рассматриваемой ткани Муфанг в явном виде:

$$\begin{cases} c^1 = a^1(e^{a^4-b^4} + e^{b^4-a^4}) - b^1, \\ c^2 = a^2(e^{a^4-b^4} + e^{b^4-a^4}) - b^2, \\ c^3 = a^3(e^{a^4-b^4} + e^{b^4-a^4}) - b^3, \\ c^4 = 2a^4 - b^4. \end{cases} \tag{16}$$

Теперь найдем уравнение сердцевины вида (11). Запишем последнее в неявной форме

$$^{-1}f(\bar{a}, \bar{b}) =^{-1} f(\bar{c}, \bar{a}),$$

затем найдем левую обратную операцию ^{-1}f для лупы (14) и подставим полученные выражения в неявные уравнения сердцевины. Из них получим те же явные уравнения (16).

Покажем, что найденная сердцевина (16) не изотопна координатной лупе (14). Для этого найдем уравнения лупы с единицей $e(0,0,0,0)$, главноизотопной квазигруппе (16). Они имеют вид:

$$\begin{cases} w^1 = u^1 \dfrac{e^{u^4+2v^4} + e^{-u^4-2v^4}}{e^{u^4} + e^{-u^4}} + v^1, \\ w^2 = u^2 \dfrac{e^{u^4+2v^4} + e^{-u^4-2v^4}}{e^{u^4} + e^{-u^4}} + v^2, \\ w^3 = u^3 \dfrac{e^{u^4+2v^4} + e^{-u^4-2v^4}}{e^{u^4} + e^{-u^4}} + v^3, \\ w^4 = u^4 + v^4. \end{cases} \tag{17}$$

Эта лупа является левой лупой Бола, поскольку, как уже было сказано, любая сердцевина изотопна левой лупе Бола. При этом, как показывает проверка, в лупе (17) не выполняется свойство правой альтернативности $u \circ (v \circ v) = (u \circ v) \circ v$, поэтому она не является правой лупой Бола [1] и, значит, не является лупой Муфанг. Следовательно, лупа (17) не изотопна лупе Муфанг (14). Таким образом, верно

Предложение 1. *Сердцевина (16) восьмимерной три-ткани Муфанг не изотопна координатной лупе (14) этой ткани.*

Укажем еще одно свойство сердцевины (16). Заметим, что уравнения (16) задают локальную координатную квазигруппу некоторой восьмимерной левой три-ткани Бола, обозначим ее B_l^*. Рассмотрим первое и четвертое уравнения системы (16):

$$\begin{aligned} c^1 &= a^1(e^{a^4-b^4} + e^{b^4-a^4}) - b^1, \\ c^4 &= 2a^4 - b^4. \end{aligned} \tag{18}$$

Согласно [1] они определяют четырехмерную три-ткань B_l – подткань рассматриваемой три-ткани B_l^*. Левая обратная квазигруппа квазигруппы (18) будет координатной квазигруппой *средней* три-ткани Бола (ткани B_m). Четырехмерные три-ткани B_m классифицированы Ивановым А.Д. по определенному принципу, который заключается в следующем. Известно [3], что всякая четырехмерная ткань Бола грассманизуема. Напомним [1], что грассманизуемой называется три-ткань $W(r,r,r)$, эквивалентная грассмановой ткани, а последняя порождается на грассмановом многообразии прямых $G(1, r+1)$ проективного пространства P^{r+1} тремя гиперповерхностями X_α, $\alpha = 1,2,3$, принадлежащими одной гиперкубике. Точки гиперповерхностей X_1, X_2 и X_3 определяют связки прямых, которые изображают слои соответственно первого, второго и третьего слоений ткани. Согласно [3] при $r = 2$, то есть для четырехмерных тканей B_m гиперповерхность X_3 является плоскостью, а гиперповерхности X_1 и X_2 принадлежат одной и той же квадрике Q пространства P^3. В [3] четырехмерные ткани B_m классифицированы по виду квадрики Q и ее взаимному расположению с плоскостью X_3. При этом различают ткани трех типов: эллиптического (квадрика Q овальная), гиперболического (квадрика Q кольцевидная) и параболического (квадрика Q является конусом). Определим тип ткани B_m, порождаемой левой обратной квазигруппой квазигруппы (18), используя соответствующие аналитические характеристики. Последние связаны с тензорами кручения и кривизны три-ткани.

Напомним [1], что тензорами кручения и кривизны произвольной три-ткани $W(r,r,r)$ называются величины a^i_{jk} и b^i_{jkl}, входящие в структурные уравнения ткани:

$$\begin{gathered} d\underset{1}{\omega}^i = \underset{1}{\omega}^j \wedge \omega^i_j + a^i_{jk}\underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k, \quad d\underset{2}{\omega}^i = \underset{2}{\omega}^j \wedge \omega^i_j - a^i_{jk}\underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k, \\ d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + b^i_{jkl}\underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^l, \end{gathered} \tag{19}$$

$i,j,k,\ldots = \overline{1,r}$. В уравнениях (19) $\underset{1}{\omega}^i$ и $\underset{2}{\omega}^i$ – формы Пфаффа, которые образуют базис в пространстве дифференциальных 1-форм многообразия $\mathcal{M}$, несущего ткань $W(r,r,r)$, при этом $\underset{1}{\omega}^i = \bar{f}^i_j dx^j$, $\underset{2}{\omega}^i = \tilde{f}^i_j dy^j$, $\bar{f}^i_j = \dfrac{\partial f^i}{\partial x^j}$, $\tilde{f}^i_j = \dfrac{\partial f^i}{\partial y^k}$, а $f = (f^i)$ – функция ткани. Слоения три-ткани $W(r,r,r)$ задаются уравнениями:

$$\lambda_1 : \underset{1}{\omega}^i = 0, \quad \lambda_2 : \underset{2}{\omega}^i = 0, \quad \lambda_3 : \underset{3}{\omega}^i \overset{def}{\equiv} \underset{1}{\omega}^i + \underset{2}{\omega}^i = 0.$$

Известно [1], что компоненты тензоров кручения и кривизны можно вычислить по формулам:

$$a^i_{jk} = \Gamma^i_{[jk]},$$

$$b^i_{jkl} = -\frac{\partial \Gamma^i_{kj}}{\partial y^m}\tilde{g}^m_l + \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^m}\bar{g}^m_k + \Gamma^i_{mj}\Gamma^m_{kl} - \Gamma^i_{jm}\Gamma^m_{kl} - \Gamma^i_{ml}\Gamma^m_{kj} + \Gamma^i_{km}\Gamma^m_{jl},$$

где $\Gamma^i_{jk} = -\dfrac{\partial^2 f^i}{\partial x^l \partial y^m}\bar{g}^l_j \tilde{g}^m_k$, $(\bar{g}^i_j)$ и $(\tilde{g}^i_j)$ – обратные матрицы для матриц $(\bar{f}^i_j)$ и $(\tilde{f}^i_j)$ соответственно.

По этим формулам найдем тензоры кручения и кривизны четырехмерной три-ткани B_l, определяемой уравнениями (18), в которых предварительно переобозначим: $a \to x$, $b \to y$, $c \to z$. В результате получим:

$$a^1_{14} = \frac{e^{y^4-x^4} - e^{x^4-y^4}}{2(e^{x^4-y^4} + e^{y^4-x^4})}, \quad b^1_{144} = -\frac{2}{(e^{x^4-y^4} + e^{y^4-x^4})^2}, \tag{20}$$

$a^1_{41} = -a^1_{14}$, $b^1_{414} = -b^1_{144}$, а остальные компоненты равны нулю.

Далее рассмотрим ткань B_m, которая порождается левой обратной квазигруппой квазигруппы (18). При указанном преобразовании парастрофии тензоры кручения $\tilde{a}^i_{jk}$ и кривизны $\tilde{b}^i_{jkl}$ ткани B_m получаются из соответствующих тензоров ткани B_l следующим образом [1]:

$$\tilde{a}^i_{jk} = -a^i_{jk}, \quad \tilde{b}^i_{jkl} = -b^i_{lkj}.$$

Отсюда с учетом (20) для ткани B_m находим ненулевые компоненты:

$$\tilde{a}^1_{14} = -\frac{e^{y^4-x^4} - e^{x^4-y^4}}{2(e^{x^4-y^4} + e^{y^4-x^4})}, \quad \tilde{b}^1_{441} = \frac{2}{(e^{x^4-y^4} + e^{y^4-x^4})^2}. \tag{21}$$

Поскольку четырехмерная ткань B_m грассманизуема (см. выше), то для нее выполняются равенства [1]:

$$\tilde{a}^i_{jk} = a_j\delta^i_k - a_k\delta^i_j, \quad \tilde{b}^i_{jkl} = b_{jk}\delta^i_l - b_{jl}\delta^i_k.$$

Из них в силу (21) получим следующие ненулевые компоненты:

$$a_4 = \frac{e^{y^4-x^4} - e^{x^4-y^4}}{2(e^{x^4-y^4} + e^{y^4-x^4})}, \quad b_{44} = \frac{2}{(e^{x^4-y^4} + e^{y^4-x^4})^2}. \tag{22}$$

Согласно [3] ткани эллиптического, гиперболического и параболического типа характеризуются соответственно условиями: $|b_{ij}| > 0$, $|b_{ij}| < 0$, $|b_{ij}| = 0$. Для рассматриваемой ткани B_m имеем:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_{44} \end{vmatrix} = 0,$$

значит, это ткань параболического типа (квадрика Q является конусом).

Определим взаимное расположение конуса Q и плоскости X_3, которые задаются в пространстве P^3 соответственно уравнениями [3]:

$$\begin{aligned} &b_{ij}x^ix^j - 2x^0x^3 = 0, \\ &x^0 - 2a_ix^i - x^3 = 0, \end{aligned}$$

$i, j = 1, 2$. Полагая $\dfrac{x^4}{x^3} = t$ и учитывая (22), запишем эту систему в виде:

$$\begin{aligned} &b_{44}(t)^2 - 4a_4t - 2 = 0, \\ &x^0 = 2a_4x^4 + x^3. \end{aligned} \tag{23}$$

Первое из уравнений системы (23) имеет два различных действительных корня, так как в силу (22) его дискриминант $D = (-4a_4)^2 + 8b_{44} > 0$. Эти корни определяют две действительные прямые, по которым плоскость X_3 пересекает конус Q. Поэтому согласно [3] рассматриваемая три-ткань B_m является тканью класса Π_3.

Этот факт можно установить иначе, используя результаты работы [4], в которой найдены уравнения всех четырехмерных три-тканей B_m параболического типа. Покажем, что уравнения рассматриваемой нами ткани B_m могут быть приведены к виду, соответствующему классу Π_3. Для квазигруппы (18) найдем уравнения левой обратной квазигруппы (она определяет ткань B_m), затем положим $a^1e^{-a^4} = \tilde{a}^1$, $e^{a^4} = \tilde{a}^4$, $e^{\frac{1}{2}b^4} = \tilde{b}^4$, $e^{\frac{1}{2}c^4} = \tilde{c}^4$, в результате получим уравнения ткани класса Π_3 [4]:

$$\tilde{a}^1 = \frac{c^1 + b^1}{(\tilde{c}^4)^2 + (\tilde{b}^4)^2}, \quad \tilde{a}^4 = \tilde{c}^4\tilde{b}^4.$$

Поскольку первые три уравнения системы (16) имеют одинаковый вид, то проведенные выше рассуждения будут справедливы для каждой четырехмерной три-ткани, определяемой любым из этих уравнений и четвертым уравнением системы (16). Таким образом, верно

Предложение 2. *Восьмимерная левая три-ткань Бола* B_l^*, *определяемая сердцевиной (16) ткани Муфанг (14), имеет три эквивалентных четырехмерных три-подткани* B_l *вида (18), для которых соответствующие ткани* B_m, *получаемые преобразованием парастрофии, будут тканями параболического типа класса* Π_3.

Список литературы

[1] Акивис М.А., Шелехов А.М. Многомерные три-ткани и их приложения// монография/ Тверь: ТвГУ, 2010, 308 с.

[2] Иванов А.Д. Об интерпретации четырехмерных тканей Боля в трехмерном проективном пространстве// Геометрия однородных пространств, М.: Моск. гос. пед. ин-т, 1973, с. 42 – 57.

[3] Иванов А.Д. О четырехмерных тканях Боля параболического типа// Изв. Вузов. Мат., 1976, № 1, с. 42 – 47.

[4] Толстихина Г.А. Об условиях изотопии координатной квазигруппы и сердцевины левой ткани Бола// Известия ПГПУ им. В.Г. Белинского/ Серия: физ.-матем. и техн. науки, раздел: математика, № 4 (26), 2011, с. 255 – 262.